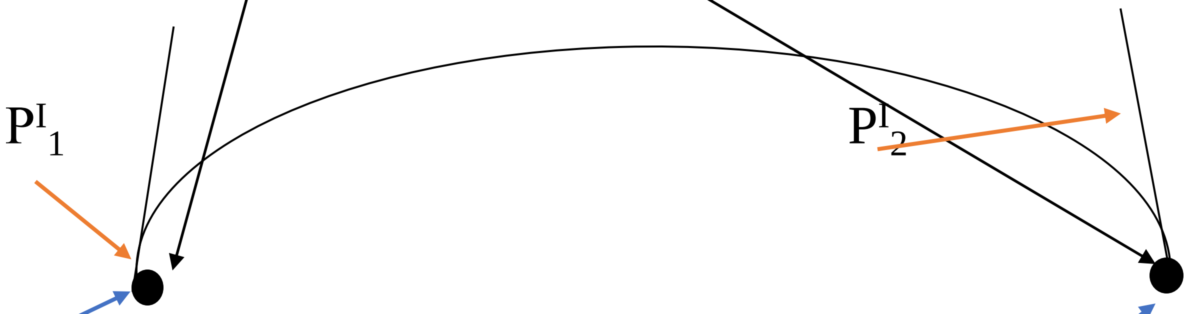
КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Кривая задана точками P_1 и P_2 и производными в этих точках



Пусть число опорных точек n. Каждой точке соответствует параметр t_i. Тогда при построении кубического сплайна по первым двум точкам первой опорной точке соответствует параметр t_1=0, а второй опорной точке соответствует параметр t_2.

КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Математическое выражение:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{4} B_i \cdot t^{i-1} = B_1 + B_2 \cdot t + B_3 \cdot t^2 + B_4 \cdot t^3$$

Производная от функции $r(t) - r'(t) = B_2 + 2 \cdot B_3 \cdot t + 3 \cdot B_4 \cdot t^2$

$$P_1 = r(0) = B_1, P_1' = r'(0) = B_2$$
$$P_2 = r(t_2) = B_1 + B_2 \cdot t_2 + B_3 \cdot t_2^2 + B_4 \cdot t_2^3$$
$$P_2' = r'(t_2) = B_2 + 2 \cdot B_3 \cdot t_2 + 3 \cdot B_4 \cdot t_2^2$$

КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Вывод формул для коэффициентов B_1, B_2, B_3, B_4

Для вывода формул для расчета B_3 и B_4 необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} P_2 = P_1 + P_1' \cdot t_2 + B_3 \cdot t_2^2 + B_4 \cdot t_2^3 \\ P_2' = P_1' + 2 \cdot B_3 \cdot t_2 + 3 \cdot B_4 \cdot t_2^2 \end{cases}$$

Выразим B_4 из первого уравнения: $B_4 = \frac{P_2 - P_1 - P_1' \cdot t_2 - B_3 \cdot t_2^2}{t_2^3}$

Подставим B_4 во второе уравнение: $P_2' = P_1' + 2 \cdot B_3 \cdot t_2 + 3 \cdot \frac{P_2 - P_1 - P_1' \cdot t_2 - B_3 \cdot t_2^2}{t_2^3} \cdot t_2^2$.

Преобразуем выражение к следующему виду: $B_3 \cdot t_2 = 3 \cdot \frac{P_2 - P_1}{t_2} - 2 \cdot P_1' - P_2'$

Результат вывода для B_3: $\boxed{B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}}$

КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Вывод формул для коэффициентов B_1, B_2, B_3, B_4

Вывод для коэффициента B_4

Подставим $B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}$ в выражение $B_4 = \frac{P_2 - P_1 - P_1' \cdot t_2 - B_3 \cdot t_2^2}{t_2^3}$

$$B_4 = \frac{P_2 - P_1 - P_1' \cdot t_2 - \left(\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}\right) \cdot t_2^2}{t_2^3} =$$

$$\frac{P_2 - P_1 - P_1' \cdot t_2 - (3(P_2 - P_1) - 2P_1' t_2 - P_2' \cdot t_2)}{t_2^3}$$

Результат вывода для B_4: $\boxed{B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}}$

КУБИЧЕСКИЙ СПЛАЙН

Значения коэффициентов

$$B_{\mathbf{1}} = P_1$$

$$B_2 = P_1'$$

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}$$

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}$$

Кубический сплайн в матричном виде (один сегмент)

$$r(t) = |t^3 t^2 t 1| \begin{vmatrix} \frac{2}{t_2^3} & -\frac{2}{t_2^3} & \frac{1}{t_2^2} & \frac{1}{t_2^2} \\ -\frac{3}{t_2^2} & \frac{3}{t_2^2} & -\frac{2}{t_2} & -\frac{1}{t_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_1' \\ P_2' \end{vmatrix}$$

$$r(t) = \sum_{i=1}^{4} B_i \cdot t^{i-1} = B_1 + B_2 \cdot t + B_3 \cdot t^2 + B_4 \cdot t^3$$

Составной кубический сплайн

Постановка задачи:

- Число опорных точек, по которым строится кривая >2
- заданы все опорные точки и производные в первой и последней опорных точках.
- Необходимо найти производные в оставшихся точках, т.е. P'_2 - P'_{n-1}

Эти значения могут быть найдены из соотношения, определяющего условие геометрической непрерывности второго порядка – *равенство вторых производных в месте стыка при единой параметризации*

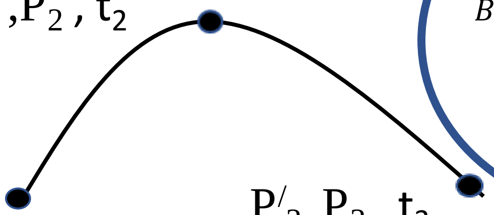
Значение второй производной: $r''(t) = 2 \cdot B_3 + 6 \cdot B_4 \cdot t$

Составной кубический сплайн.

Вывод соотношений для случая двух сегментов

$$r'(t) = B_2 + 2 \cdot B_3 \cdot t + 3 \cdot B_4 \cdot t^2$$

$P^{/}_2, P_2, t_2$



$P^{/}_1, P_1, t_1$ $P^{/}_3, P_3, t_3$

$$B_1 = P_1$$
$$B_2 = P_1'$$
$$B_3 = \frac{3(P_2-P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}$$
$$B_4 = \frac{2(P_1-P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}$$

Условие сохранения гладкости в местах стыка сегментов:

$$r_1^{//}(t_2) = r_2^{//}(0)$$

Последняя точка первого сегмента

Первая точка второго сегмента

Значение второй производной в конце первого сегмента:

$$r_1^{//} = 2 \cdot B_3 + 6 \cdot B_4 \cdot t_2 =$$
$$2 \cdot \left(\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}\right) + 6 \cdot \left(\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}\right) t_2$$

Значение второй производной в начале второго сегмента, т.е. при значения параметра $t = 0$, можно вычислить по следующей формуле, при условии, что в конце второго сегмента при сквозной параметризации последней опорной точке соответствует параметр t_3:

$$r_2^{//} = 2 \cdot B_3 = r''(0) = 2 \cdot \left(\frac{3(P_3-P_2)}{t_3^2} - \frac{2P_2'}{t_3} - \frac{P_3'}{t_3}\right)$$

Составной кубический сплайн.
Вывод соотношений для случая двух сегментов

Для выполнения условия гладкости по второй производной необходимо значения двух производных приравнять.

$$2\cdot\left(\frac{3(P_2-P_1)}{t_2^2}-\frac{2P_1'}{t_2}-\frac{P_2'}{t_2}\right)+6\cdot\left(\frac{2(P_1-P_2)}{t_2^3}+\frac{P_1'}{t_2^2}+\frac{P_2'}{t_2^2}\right)t_2=2\cdot\left(\frac{3(P_3-P_2)}{t_3^2}-\frac{2P_2'}{t_3}-\frac{P_3'}{t_3}\right)$$

Необходимые шаги:

1. Перенос всех производные в левую часть равенства, а все значения координат точек в правую часть
2. Для нахождения неизвестной производной нужно правую и левую части умножить на $t_2 t_3$.

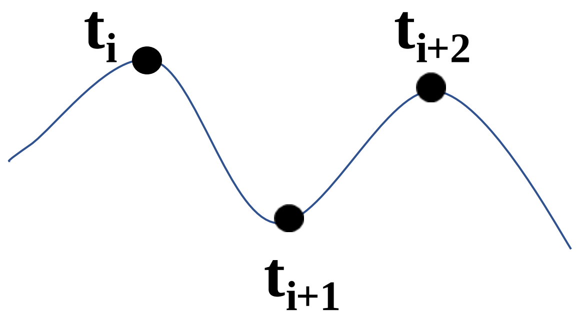
Результирующее соотношение

$$t_3\cdot P_1'+2\cdot P_2'(t_2+t_3)+P_3'\cdot t_2=\frac{3}{t_2t_3}\left(t_2^2(P_3-P_2)+t_3^2(P_2-P_1)\right)$$

Составной кубический сплайн

соотношение для произвольного числа сегментов (в общем виде)

Соотношение для точек, которым соответствуют параметры t_i, t_{i+1}, t_{i+2}



$$t_3 \cdot P_1' + 2 \cdot P_2'(t_2 + t_3) + P_3' \cdot t_2 = \frac{3}{t_2 t_3}(t_2^2(P_3 - P_2) + t_3^2(P_2 - P_1))$$

$$t_{i+2} \cdot P_i' + 2 \cdot P_{i+1}'(t_{i+1} + t_{i+2}) + P_{i+2}' \cdot t_{i+1} = \frac{3}{t_{i+1} t_{i+2}}(t_{i+1}^2(P_{i+2} - P_{i+1}) + t_{i+2}^2(P_{i+1} - P_i))$$

Составной кубический сплайн.
Матричное уравнение для расчета значений производных в промежуточных точках

Матричное уравнение позволяет найти все неизвестные значения производных, и после этого могут быть построены все сегменты составной кривой:

$$\boxed{t_{i+2} \cdot P_i' + 2 \cdot P_{i+1}'(t_{i+1} + t_{i+2}) + P_{i+2}' \cdot t_{i+1} = \frac{3}{t_{i+1} t_{i+2}}\left(t_{i+1}^2 (P_{i+2} - P_{i+1}) + t_{i+2}^2 (P_{i+1} - P_i)\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & \ldots & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 \ldots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ \vdots \\ P_{n-1}' \\ P_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' \\ \frac{3}{t_2 t_3}\left[t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)\right] \\ \frac{3}{t_3 t_4}\left[t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2)\right] \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n}\left[t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2})\right] \\ P_n' \end{bmatrix}$$

Составной кубический сплайн.
Различные граничные условия

- *Закрепленные граничные условия* (рассмотрено ранее)
- *Слабые граничные условия* – кривизна в граничных точках равна нулю.

$$P_1'' = 0, P_n'' = 0$$

- *Циклические граничные условия* $P_1' = P_n', P_1'' = P_n''$. При таких граничных условиях можно построить замкнутую или периодически повторяющуюся кривую.
- *Ациклические граничные условия* $P_1' = -P_n', P_1'' = -P_n''$

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2}$$

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}$$

Пример определения значений производных при граничных условиях, отличных от закрепленных. слабые граничные условия.

необходимо найти вторую производную в первой и последней опорных точках.

В первой точке: $P_1'' = P''(0) = 6B_4 t + 2B_3 = 2B_3$

$$\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} = 0$$

В последней точке: $P_n'' = P''(t_n) = 2B_3 + 6B_4 t_n = 0$

Результат:

В матричном уравнении в матрице левой части в первой строке должно быть $P_1' + \frac{P_2'}{2}$ и в первой строке матрицы правой части $\frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1)$.

В матричном уравнении в первой матрице левой части в последней строке должно быть $2P_{n-1}' + 4P_n'$, в последней строке матрицы правой части $-\frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1})$.

Свойства составного кубического сплайна

1. Является C^1 и C^2 гладкой.
2. Проходит через опорные точки, является интерполяционной кривой.
3. Не лежит в выпуклой оболочке, образованной опорными точками.
4. Аффинно-инвариантна.
5. Не инвариантна по отношению к перспективным преобразованиям.
6. Любое изменение опорных точек или их добавление приводит к пересчету кривой.
7. Не поддается интерактивному редактированию.

Кривая Эрмита.

Вывод математического выражения Шарля Эрмита

Не использовал кубические сплайны!

Постановка задачи: определить коэффициенты a, b, c, d функции r(t), удовлетворяющие условиям r(0)= P_1, r(1)=P_2, $r'_1(0)=P'_1$, $r'(1)=P'_2$, где P_1 и P_2 – первая и последняя точка кривой. P'_1 и P'_2 – значение первой производной в первой и последней точках кривой.

Кривую r(t) в матричном виде можно представить следующим образом:

$$r(t) = [t^3\ t^2\ t\ 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = [t^3\ t^2\ t\ 1]C$$

Тогда $r(0) = [0\ 0\ 0\ 1]C, r(1) = [1\ 1\ 1\ 1]C, r'(0) = [0\ 0\ 1\ 0]C, r'(1) = [3\ 2\ 1\ 0]C$

Матричное представление:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P'_1 \\ P'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\ 0\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ 3\ 2\ 1\ 0 \end{bmatrix} C$$

Кривая Эрмита.

Вывод математического выражения Шарля Эрмита

Решение уравнения относительно С:

$$C=\begin{bmatrix}0\,0\,0\,1\\1\,1\,1\,1\\0\,0\,1\,0\\3\,2\,1\,0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_1'\\P_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2 & 1 & 1\\-3\ \ 3-2-1\\0 \quad 0 & 1 & 0\\1 \quad 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_1'\\P_2'\end{bmatrix}=M_hG_h$$

M_h _ Эрмитова матрица-магическая матрица Эрмита. G_h - геометрический вектор Эрмита.

Математическое представление кривой Эрмита:

$$r(t)=[t^3t^2t1]\begin{bmatrix}2-2 & 1 & 1\\-3\ \ 3-2-1\\0 \quad 0 & 1 & 0\\1 \quad 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_1\\P_2\\P_1'\\P_2'\end{bmatrix}=[t^3t^2t1]\,M_hG_h$$

Кривая Эрмита – частный случай кубического сплайна – *нормализованный кубический сплайн*

Если нормализовать каждый из сегментов – то в его начале t=0, а в его конце t=1 математическое выражение для коэффициентов B_1, B_2, B_3, B_4 ,следующий вид

$$B_{\mathbf{1}} = P_1 , B_2 = P_1', B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2},$$

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}$$

$$B_{\mathbf{1}} = P_1, B_2 = P_1', B_3 = 3(P_2 - P_1) - 2P_1' - P_2',$$
$$B_4 = 2(P_1 - P_2) + P_1' + P_2'$$

Матричное представление кривой имеет следующий вид:

$$r(t) = [t^3 t^2 t 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_1' \\ P_2' \end{bmatrix}$$

Полностью совпадает с математическим выражением, полученным Шарлем Эрмитом!

Составная кривая Эрмита

Основные положения:

- число опорных точек, по которым строится кривая Эрмита, больше, чем две, кривую можно построить только, как составную
- принцип построения такой же, как для кубических сплайнов –соблюдения геометрической непрерывности нулевого, первого и второго порядка в местах стыка сегментов составной кривой Эрмита.
- использование матричного уравнения для поиска производных в промежуточных точках. Упрощение матричного уравнения для кубического сплайна - замена значения параметров t_i на единицу

Матричное уравнение для составной кривой Эрмита:

$$\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ .\ .\ .\ .\ 0 \\ 1\ 4\ 1\ 0\ .\ .\ .\ .0 \\ 0\ 1\ 4\ 1\ 0\ ...\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0\ .\ .\ .\ 0\ 1\ 4\ 1 \\ 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ . \\ . \\ . \\ P'_{n-1} \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1 \\ 3((P_3-P_2)+(P_2-P_1)) \\ 3((P_4-P_3)+(P_3-P_2)) \\ . \\ . \\ . \\ 3((P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})) \\ P'_n \end{bmatrix}$$

Другое представление матричного уравнения:

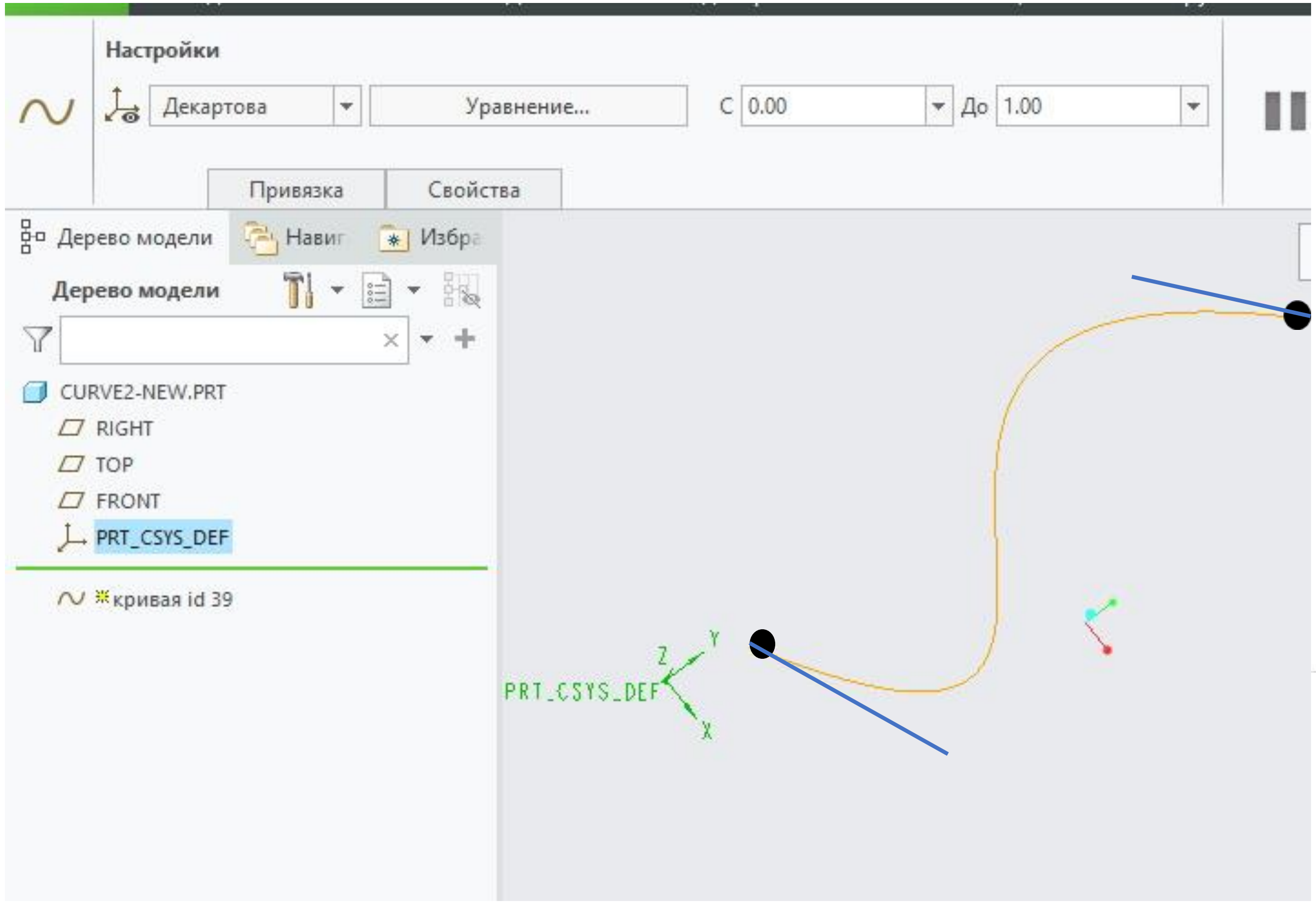
$$\begin{bmatrix} 1\ 0\ 0\ .\ .\ .\ .\ 0 \\ 1\ 4\ 1\ 0\ .\ .\ .\ .0 \\ 0\ 1\ 4\ 1\ 0\ ...\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0\ .\ .\ .\ 0\ 1\ 4\ 1 \\ 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ . \\ . \\ . \\ P'_{n-1} \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P'_1 \\ -3\quad 0\ 3\quad 0\ .\ .\ .\ .0 \\ 0\quad -3\quad 0\ \ 3\ 0\ .\ .\ .\quad 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0\quad .\ .\ .\ .\quad -3\quad 0\ 3 \\ P'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ . \\ . \\ . \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix}$$

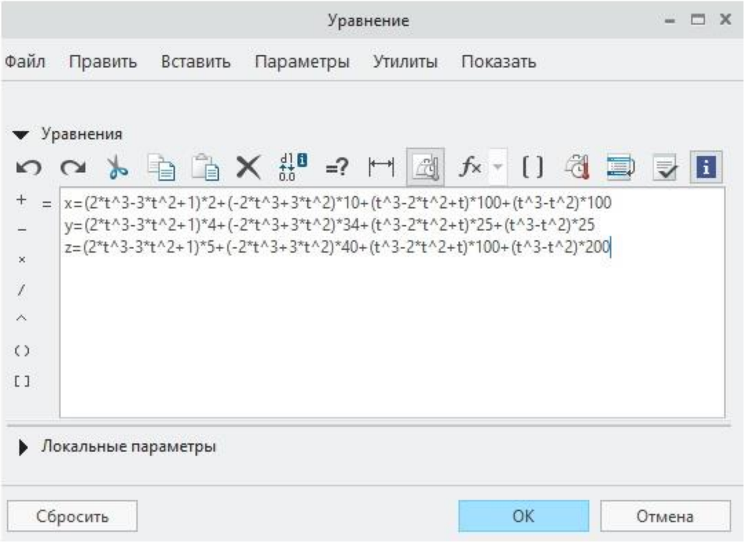
Свойства составных Кривых Эрмита

1. Является гладкой до второго порядка включительно.
2. Проходит через все опорные точки.
3. Не лежит в выпуклой оболочке, образованной опорными точками.
4. Кривая полностью меняется при добавлении опорных точек или при изменении хотя бы одной опорной точки. В этом случае необходим пересчет всей кривой.
5. Кривая аффинно инвариантна. Перспективно не инвариантна.
6. Не поддается редактированию.

Полностью совпадают с свойствами составных кубических сплайнов!

Пример отрисовки кривой Эрмита в САПР Creo Parametric





Пример задачи на кубический сплайн

Задача:

Даны 4 точки, через которые должен проходить кубический сплайн –

P_1 (0,0), P_2 (1,2), P_3 (3,3), P_4 (4,3)

Записать матричное уравнение для определения производных в промежуточных точках (P_2, P_3) в случае закрепленных и слабых граничных условий.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & \dots & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 \dots & 0 \\ & \vdots & & & \\ 0 & \dots & P'_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ \vdots \\ P'_{n-1} \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3}\left[t_2^2(P_3-P_2)+t_3^2(P_2-P_1)\right] \\ \frac{3}{t_3 t_4}\left[t_3^2(P_4-P_3)+t_4^2(P_3-P_2)\right] \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n}\left[t_{n-1}^2(P_n-P_{n-1})+t_n^2(P_{n-1}-P_{n-2})\right] \\ P'_n \end{bmatrix}$$

$t_2 = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$t_3 = \sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{5}$

$t_4 = \sqrt{(4-3)^2+(3-3)^2} = 1$

1. Закреплённые граничные условия

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 2(\sqrt{5}+\sqrt{5}) & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2(\sqrt{5}+1) & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1' \\ \frac{3}{5}\left[5(2,1)+5(1,2)\right] \\ \frac{3}{\sqrt{5}}\left[5[1,0]+\ [2,1]\right] \\ P_4' \end{bmatrix}$$

2. Слабые граничные условия

Изменения в первой и последней строках.

Первая строка $P_1' + \frac{P_2'}{2}, \frac{3}{2t_2} (P_2-P_1)$

Последняя $2P_{n-1}' + 4P_n' \quad \frac{6}{t_n} (P_n-P_{n-1})$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 4\sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2(\sqrt{5}+1) & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{5}}\left[(1,2)-(0,0)\right] \\ \frac{3}{5}\left[5(2,1)+5(1,2)\right] \\ \frac{3}{\sqrt{5}}\left[5(1,0)+(2,1)\right] \\ \frac{6}{1}\left[(4,3)-(3,3)\right] \end{bmatrix}$$