Базовые знания, необходимые для понимания геометрических моделей

- Три главных формы математического представления кривых и поверхностей
- Аффинные преобразования
- Понятие однородных координат
- Основные операции векторной алгебры
- Решение геометрических задач на плоскости (положение точки относительно прямой и многоугольника, пересечение прямых и т.п.)
- Аналитическое описание отрезков прямых, кривых второго и третьего порядка в каноническом виде
- Алгоритмы построения кривых по опорным точка – аппроксимация и интерполяция

Три главных формы математического представления кривых и поверхностей

- Явная форма
- Неявная форма
- Параметрическая форма представления

Явная форма представления кривых и поверхностей

Явная форма – уравнение, в левой части которого стоит зависимая переменная, а в правой части – функция, аргументом которой является независимая переменная:

$$y = f(x)$$

Недостаток: линии существуют независимо от их формы представления, но явное задание возможно не для всех типов линий!

Примеры невозможности описания линий в явном виде

1. Окружность симметричная кривая в двумерном пространстве. Задается радиусом – r и центром, если центр находится в начале координат, то в явном виде окружность можно задать ***только*** двумя уравнениями:

$$y^2 = r^2 - x^2 - \text{верхняя полуплоскость}$$

$$y^2 = -(r^2 - x^2) \text{ - нижняя полуплоскость}$$

Примеры невозможности описания линий в явном виде

2. В трехмерном пространстве не все кривые и поверхности могут быть описаны уравнениями в явном виде.

Система уравнений:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ z = cx + d \end{cases}$$

Описывает прямую в трехмерном пространстве. Но таким образом нельзя описать прямую, лежащую в вертикальной плоскости (x=const)

Неявная форма задания кривых и поверхностей

Математическое описание с помощью формулы:

$$f(x,y)=0,\ f(x,y,z)=0$$

Смысл такого описания: функция f выделяет из всех точек пространства те, которые принадлежат описываемой линии. Можно проверить для каждой пары или тройки координат лежат ли эти точки на какой-либо линии.

Достоинство: Менее зависима от системы координат, чем явная форма задания, т.к. предоставляет возможность, например, легко задавать окружность

Недостаток неявной формы задания

В общем случае неявная форма не позволяет определить значение координаты y точки на кривой для заданного значения x (например, для самопересекающихся или двузначных кривых)

Пример: линия в трехмерном пространстве описывается только с помощью системы уравнений, представляющих поверхности, пересечение которых и образуют эту линию, если такое пересечение есть:

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Параметрическая форма представления

Достоинства:

- единообразие в двумерном и трехмерном пространствах;
- Наиболее гибкая;
- Устойчива к любым изменениям формы и ориентации объектов;
- Нет привязанности к системе координат.

Математическое представление отрезка прямой.

- Неявное задание:

$$\det(P, P_2 P_3) = \begin{vmatrix} x & \mathrm{y} & 1 \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_1 & 1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{y}_2 & 1 \end{vmatrix} = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

- Явное задание:

$$y = m(x - x_1) + y_1, x = \frac{1}{m}(y - y_1) + x_1, \text{где } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Параметрическое задание:

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t,\ \ 0 < \mathrm{t} < 1$$

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

Проблемы при использовании декартовых координат в геометрическом моделировании:

- невозможно единообразно описать математически все аффинные преобразования
- нет возможности описать преобразования относительно произвольной точки
- нельзя задать с помощью координат точки в бесконечности на различных осях при выполнении проективных преобразований (центральная проекция).

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

Почему координаты однородные?

понятие ***однородных и неоднородных выражений или уравнений***

1. Уравнение прямой - ax+by+c=0 – выражение **неоднородное**

a,b,c – постоянны, а x,y –переменные

2. Пучок пересекающихся в одной точке прямых – такое же уравнение, но оно уже **однородное. Почему?** a,b,c – переменные, а x,y –const - все члены выражения ax+by+c=0 в этом случае имеют первую степень.

Задание точки P(x,y) в однородных координатах

P(X,Y,W)=P(Wx,Wy,W), где W не равно 0

Выражение для одной прямой –

$$aX+bY+cW=0$$

Определение декартовых координат по однородным –

$$x= X/W,\ y=Y/W$$

В геометрическом моделировании принято: W=1

Однородные координаты точки на плоскости: P(x,y,1).

ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

Представление точки в бесконечности с помощью однородных координат

- Точка в бесконечности на прямой ax+by=0 – [a b 0]
- Точка на положительной оси X в бесконечности – [1 0 0]
- Точка на отрицательной оси X в бесконечности – [-1 0 0]
- Точка на положительной оси Y в бесконечности – [0 1 0]
- Точка на отрицательной оси Y в бесконечности – [0 -1 0]
- Точка на прямой y=x в бесконечности в направлении[1 1] – [1 1 0]

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основные определения

Аффинная геометрия - Теория инвариантов аффинных преобразований и есть аффинная геометрия.

Инварианты (постоянные свойства) аффинных преобразований:

- коллинеарность точек – прямые отображаются в прямую
- параллельность прямых
- сохранение отношения для коллинеарных отрезков (отношение длин сохраняется)
- отношение площадей сохраняется.

аффинные преобразования не сохраняют длину отрезков и величину углов - в аффинной геометрии этих понятий нет!

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основные определения

- ***Свойство* фигуры называют *аффинным*, если оно не изменяется при всех аффинных преобразованиях.**

- ***Фигура* называется *аффинной*, если ее характеристическое свойство является аффинным**

Пример: ***Характеристическое свойство параллелограмма– аффинный инвариант – параллельность сторон***

- ***Две фигуры* называются *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное преобразование, отображающее одну из них в другую.**

Важно: В аффинной геометрии нельзя классифицировать треугольники и выделить их виды. Нельзя из параллелограммов выделить ромбы, прямоугольники и квадраты.

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Аффинное преобразование на плоскости математически задается следующим образом:

$$x^1 = ax + by + p$$

$$y^1 = cx + dy + q$$

$$\begin{vmatrix} a\ b \\ cd \end{vmatrix} \neq 0$$

Координаты точки P(x,y) после преобразования:

$[x,y]\begin{bmatrix} a\ b \\ cd \end{bmatrix}$= [xa+yc, xb+yd]

Примеры задач на доказательство сохранения аффинных инвариантов (при таком задании аффинных преобразований)

1. Доказать сохранение ***аффинного свойства параллельности двух прямых***. Т.е. доказать, что при выполнении такого преобразования наклон отрезка прямой - m=$(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$, не зависит от координат концов отрезка.

2. Доказать, что средняя точка отрезка прямой после выполнения аффинных преобразований также остается средней точкой (***сохранение отношения длин***)

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Параллельность прямых:

Даны две точки, задающие отрезок прямой. Покажем, что наклон прямой после аффинного преобразования зависит от наклона исходной прямой.

$A=[x_1, y_1]$ и $B=[x_2, y_2]$

$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1a+y_1c & x_1b+y_1d \\ x_2a+y_2c & x_2b+y_2d \end{bmatrix}$ - новые координаты точек.

Наклон отрезка прямой после преобразования

$m^*=((x_2b+y_2d) - (x_1b+y_1d))/((x_2a+y_2c)-(x_1a+y_1c))= [(b+d(y_2-y_1)/(x_2-x_1))]/[(a+c(y_2-y_1)/(x_2-x_1)]=(b+dm)/(a+cm)$ – ***наклон преобразованной прямой зависит от значения исходного наклона***

Аналогичен вывод для второго отрезка прямой. Значение наклона такое же. ***Параллельные прямые остались параллельными***

Сохранение отношения длин:

Подсказка! Для доказательства необходимо показать, что результат выполнения аффинного преобразования средней точки отрезка равен координатам середины преобразованного отрезка.

Координаты концов преобразованного отрезка.

Координаты середины полученного отрезка:

$[x_m^*, y_m^*,] =[((x_1a+y_1c)+(x_2a+y_2c))/2, ((x_1b+y_1d)+(x_2b+y_2d))/2]=$
$[a(x_1+ x_2)/2+c (y_1+ y_2)/2, b(x_1+ x_2)/2+d (y_1+ y_2)/2]$

Выполнение аффинных преобразований над средней точкой:

$[(x_1+ x_2)/2, (y_1+ y_2)/2] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ - результат такой же

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Основные аффинные преобразования:

- ***перенос – translation***
- ***масштабирование – dilatation***
- ***поворот – rotation***
- ***отражение – reflection***

1. *Перенос.*

В декартовых координатах $x_1 = x + x_т, y_1 = \text{y} + \text{y}_т, z_1 = z + z_т, x_т, \text{y}_т z_т -$ перенос по координатным осям. $x_т, \text{y}_т z_т -$ перенос по координатным осям.

Перенос по трем координатам в матричном виде при использовании однородных координат :

$$.[x_1, y_1, z_1, 1] = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_т & y_т & z_т & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание! последовательные переносы являются ***аддитивными*** (переносы по координатным осям суммируются).

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2. Масштабирование.

В декартовых координатах:

$x_1 = S_x \cdot x, y_1 = S_y \cdot$ y, $z_1 = S_z.z$, S_x, S_y, S_z.- масштабные множители по осям X,Y и Z. Если $S_x = S_y = S_z$., то такое масштабирование называется ***общим*** или ***однородным***. Если все множители не равны друг другу, то такое масштабирование называется ***неоднородным.***

Масштабирование в матричном виде при использовании однородных координат:

$$[x_1, y_1, z_1, 1] = [x, y, z, 1]\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Замечание! последовательное масштабирование ***мультипликативно*** **(**масштабные коэффициенты перемножаются)

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3. ***Отражение.***

В декартовых координатах:

Отражение относительно оси ***X*** **-** $x_1 = x, \; y_1 = -y$

В матричном виде – при использовании однородных координат:

$$[x_1, y_1, 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Отражение на плоскости относительно прямой y=x и y=-x

$$[x_1, y_1, 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [x_1, y_1, 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Отражение в 3-х мерном пространстве относительно, например плоскости XZ

$$[x_1, y_1, z_1, 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

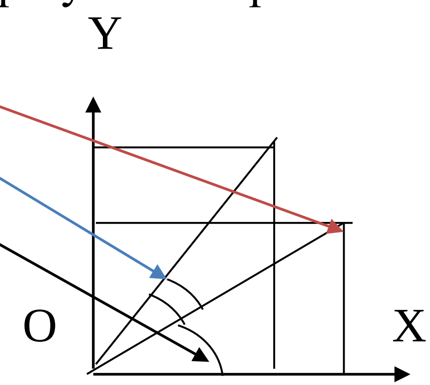
АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

4. *Поворот*

- ✓ **На плоскости XY поворот происходит относительно начала координат.**

Положительный поворот – против часовой стрелки; отрицательный по часовой стрелке

осуществляется поворот на угол θ относительно начала координат в плоскости XY точки P, координаты которой $P = [x, y]$=$[r\cos\varphi, \text{r}\sin\varphi]$, где r- расстоянии от начала координат до точки P, а угол $\varphi -$ угол, который образует вектор OY с осью X.



$\text{P}_1 = [x_1, y_1] = [r\cos(\varphi+\theta), r\sin(\varphi+\theta)] =$
$[r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta), r(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)] =$
$[x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta\ ]$

В матричном виде:$P_1 = [x, y, 1]\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

Замечание! ***Два последовательных поворота аддитивны (углы суммируются)***

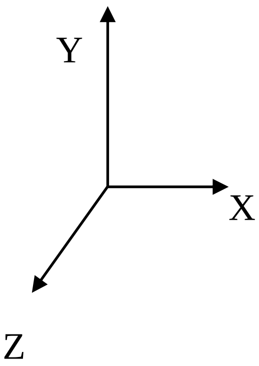
Отрицательный поворот – транспонированная матрица положительного поворота

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

✓ **Поворот в трехмерном пространстве**

Поворот в трехмерном пространстве представляет собой последовательные повороты в разных координатных плоскостях. Преобразование общего поворота можно определить, как перемножение трех матриц поворота в трех координатных плоскостях. Матричное умножение **не коммутативно**, поэтому необходимо выбрать порядок поворотов. Обычно сначала выполняется поворот относительно оси X (в плоскости ZY), затем относительно оси Y (в плоскости ZX), потом относительно оси Z (в плоскости XY).

Если матрицу поворота обозначить R, то общий поворот есть произведение трех матриц R_x, R_y,R_z.



$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

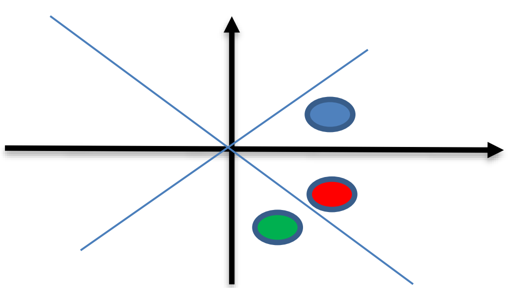
$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Простейшие задачи на аффинные преобразования

- ***Доказать следующее утверждение:*** Поворот на 270^0 против часовой стрелки эквивалентно выполнению последовательно 2-х операций – Отражение относительно оси X и отражение относительно прямой y= -x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

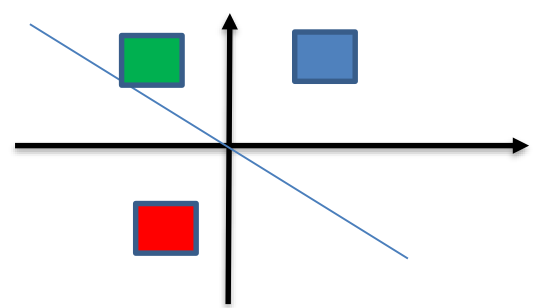
$$= \begin{bmatrix} cos270 & sin270 & 0 \\ -sin270 & cos270 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- ***Доказать следующее утверждение:*** Зеркальное отражение относительно оси X , следующее за зеркальным отражением относительно прямой y=-x эквивалентно повороту на 90^0 относительно начала координат против часовой стрелки

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos90 & sin90 & 0 \\ -sin90 & cos90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Комплексные аффинные преобразования на плоскости

- ✓ ***Поворот относительно произвольной точки***

Использование матрицы поворота позволяет выполнить поворот только относительно начала координат

Этапы выполнения поворота относительно произвольной точки:

- необходимо выполнить сначала перенос этой точки в начало координат,
- затем поворот относительно начала координат
- После этого опять перенести точку в прежнее место.

Таким образом, ***комплексное преобразование представляет собой произведение трех матриц:***

$\mathbf{M_{комплексное} = T_{нач.коорд.} x\ R_z x T_{в\ исх.\ точку}}$

- ✓ ***Отражение на плоскости относительно произвольной прямой***

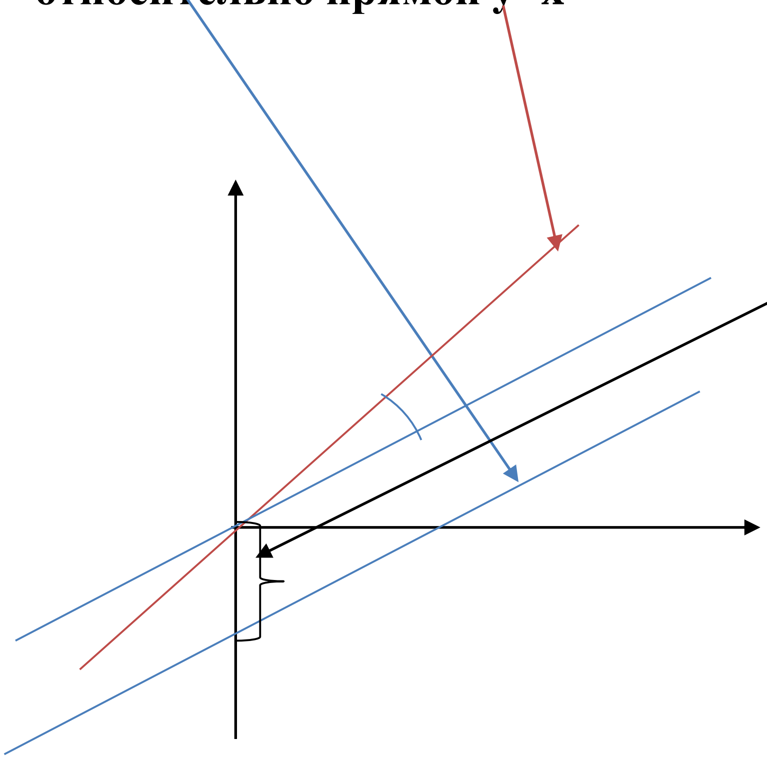
Необходимо выполнить пять шагов, т.е. комплексное преобразование будет представлять собой произведение пяти матриц

- Перемещение прямой и объектов изображения таким образом, чтобы прямая прошла через начало координат.
- Поворот прямой и объекта вокруг начала координат до совпадения с одной из координатных осей.
- Отражение относительно координатной оси.
- Обратный поворот вокруг начала координат.
- Перемещение в исходное состояние.

$\mathbf{[O_k]=[T][R][O][R]^{-1}[T]^{-1}}$

Пример задачи на комплексное преобразование на плоскости

Записать матрицу преобразования **– отражение относительно произвольной прямой, используя матрицу отражения относительно прямой y=x**



Этапы решения задачи:

1. **Перенос исходной прямой на расстояние {a} так, чтобы прямая проходила через начало координат**
2. **Поворот против часовой стрелки на угол между прямой y=x и прямой, проходящей через начало координат**
3. **Отражение относительно прямой y=x**
4. **Обратный поворот**
5. **Обратный перенос**

$$[O_k]=[T]\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}[T]^{-1}$$

Комплексные аффинные преобразования в пространстве

1. ***Отражение относительно произвольной плоскости.***

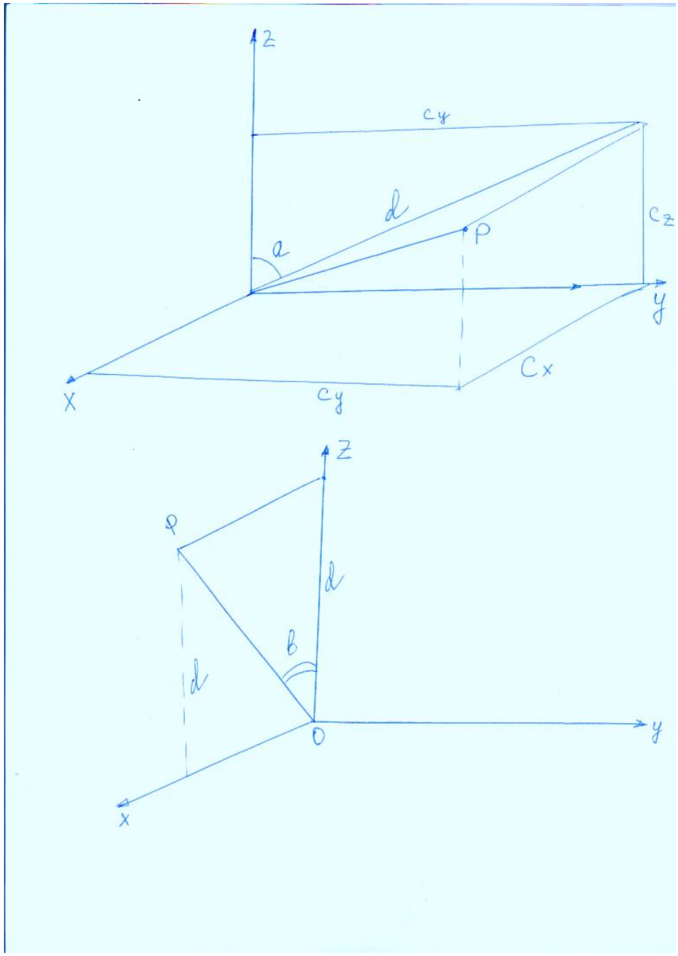
- ✓ Перенести точку Р, принадлежащую плоскости в начало координат.
- ✓ Повернуть вектор нормали к плоскости до совпадения с осью Z (потребуется два поворота – относительно оси X и относительно оси Y), после этих поворотов плоскость совпадает с плоскостью Z=0.
- ✓ Отразить объекты изображения относительно плоскости Z=0.
- ✓ Выполнить необходимые обратные преобразования.

Комплексное преобразование в этом случае будет представлять произведение семи матриц.

2. ***Поворот вокруг произвольной оси в пространстве***.

- ✓ Выполнить перенос точки, принадлежащей оси в начало координат.
- ✓ Выполнить повороты относительно оси X и относительно оси Y для совмещения оси с осью Z.
- ✓ Выполнить поворот вокруг оси Z.
- ✓ Выполнить преобразования, обратные тем, которые позволили совместить ось вращения с осью Z.
- ✓ Выполнить обратный перенос.

Решение задачи совмещения оси (отрезка прямой) с одной из координатных осей



OP - нормированный вектор

d – его проекция на плоскость ZY
$d=(C_z{}^2 + C_y{}^2)^{1/2}$

1. Поворот в плоскости ZY на угол a относительно оси X – совмещение d с осью OZ

a= arcsin (C_y /d)

2. Поворот в плоскости ZX относительно y на угол b по часовой стрелке для совмещения единичного вектора с осью Z. b= arccos(d)

3. Выполнение необходимого преобразования. Например, поворот относительно оси Z.

Преобразование - $\mathbf{R_x R_y R_z}$

Задача на комплексное отражение относительно произвольной прямой

Записать результирующие координаты в виде произведения матриц: отражение относительно прямой y= (x+4) /2 треугольника ABC

A[2,4,1], B[4,6,1], C[2,6,1]

Решение:

1. преобразуем уравнение прямой к виду – y=x/2+2;
2. из уравнения видно, что для совмещения с осью X необходимо перенести прямую на 2 по оси Y вниз и затем выполнить
3. Поворот
4. по часовой стрелке на угол θ =arctg(1/2)

Матрица преобразования – результат умножения 6-и матриц

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2&4&1\\4&6&1\\2&6&1\end{bmatrix}\text{x}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\text{x}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{x}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{x}\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\text{x}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$